CCP Physique 1 PC 2009 — Corrigé

I.1.1 En coordonnées polaire, on a

$$\boxed{\overrightarrow{v} = \dot{r}\,\overrightarrow{e_r} + r\dot{\theta}\,\overrightarrow{e_\theta} \qquad \text{et} \qquad \overrightarrow{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\,\overrightarrow{e_r} + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\,\overrightarrow{e_\theta}}$$

I.1.2 La force d'attraction exercée par le Soleil sur une masse m s'écrit

$$\boxed{\overrightarrow{\mathrm{F_S}} = -\frac{\mathcal{G}\mathcal{M}_\mathrm{S} m}{r^2}\,\overrightarrow{e_r}}$$

La force de gravitation étant **centrale**, le moment cinétique du point m est conservé. Comme elle est de plus **conservative** et seule à s'exercer, l'énergie mécanique du point m est elle aussi conservée.

I.1.3 Dans le référentiel héliocentrique supposé galiléen, le principe fondamental de la dynamique (PFD) sur m soumis à la seule force de gravitation s'écrit

$$\boxed{m\left[(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\,\overrightarrow{e_r} + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\,\overrightarrow{e_\theta}\right] = -\frac{\mathcal{G}\mathcal{M}_\mathrm{S} m}{r^2}\,\overrightarrow{e_r}}$$

Dans le cadre d'une orbite circulaire de rayon r, la projection sur $\overrightarrow{e_r}$ donne

$$-m\,r\dot{\theta}^2 = -\frac{\mathcal{G}\mathcal{M}_\mathrm{S} m}{r^2}$$

soit
$$\boxed{\mathrm{T} = \frac{2\pi}{\dot{\theta}} = 2\pi\sqrt{\frac{r^3}{\mathcal{G}\mathcal{M}_\mathrm{S}}} = 690 \text{ jours}}$$

I.1.4 La relation demandée revient à

$$m\ddot{r} = -\frac{\mathrm{dE_p}}{\mathrm{d}r} = \frac{\mathcal{L}^2}{mr^3} - \frac{\mathcal{G}\mathcal{M}_\mathrm{S} m}{r^2}$$

Or, la projection selon $\overrightarrow{e_r}$ du PFD donne

$$m\ddot{r} - mr\dot{\theta}^2 = -\frac{\mathcal{G}\mathcal{M}_\mathrm{S} m}{r^2}$$

d'où, par identification,
$$mr\dot{\theta}^2 = \frac{\mathcal{L}^2}{mr^3}$$

soit
$$\boxed{\mathcal{L} = mr^2\dot{\theta}}$$

$\mathcal{L}$ est le moment cinétique de la particule, qui est bien conservé par la force centrale, ce qui justifie a posteriori l'expression de l'énergie potentielle effective et on a bien

$$\boxed{m\ddot{r} = -\frac{\mathrm{dE_p}}{\mathrm{d}r}}$$

I.1.5 L'énergie totale du système (qui est une quantité conservée) peut s'écrire

$$\mathrm{E_m} = \frac{1}{2}\,m\dot{r}^2 + \mathrm{E_p}(r)$$

Dans les trois cas présentés :
- si $E_m = E_A$, on a $\dot{r} = 0$: la trajectoire est **circulaire** car r ne varie pas ;
- si $E_m = E_B$, la trajectoire reste **liée** mais oscille entre deux valeurs extrêmes de r ;
- si $E_m = E_C$, la particule peut partir à l'infini : c'est un **état de diffusion**.

I.2.1 La quantité de mouvement cédée à la voile par la particule vaut

$$\delta\overrightarrow{p} = -(\overrightarrow{p_r} - \overrightarrow{p_i}) = -\Big[\big(p\sin\alpha\,\overrightarrow{u} - p\cos\alpha\,\overrightarrow{n}\big) - \big(p\sin\alpha\,\overrightarrow{u} + p\cos\alpha\,\overrightarrow{n}\big)\Big]$$

soit
$$\boxed{\delta\overrightarrow{p} = 2p\cos\alpha\,\overrightarrow{n} = 2p\left[\cos^2\alpha\,\overrightarrow{e_r} + \cos\alpha\sin\alpha\,\overrightarrow{e_\theta}\right]}$$

avec $\overrightarrow{n} = \cos\alpha\,\overrightarrow{e_r} + \sin\alpha\,\overrightarrow{e_\theta}$.

I.2.2 Pendant le temps Δt, la voile subit $N_i\Delta t$ chocs, d'où $\Delta\overrightarrow{p} = N_i\Delta t\,\delta\overrightarrow{p}$ soit

$$\boxed{\frac{\Delta\overrightarrow{p}}{\Delta t} = N_i\,\delta\overrightarrow{p}}$$

En appliquant le PFD à la voile, on identifie $\overrightarrow{F}$ à $\Delta\overrightarrow{p}/\Delta t$, c'est-à-dire

$$\boxed{\overrightarrow{F} = N_i\,2p\cos\alpha\,\overrightarrow{n} = N_i\,2p\left[\cos^2\alpha\,\overrightarrow{e_r} + \cos\alpha\sin\alpha\,\overrightarrow{e_\theta}\right]}$$

I.2.3 Comme $N_i = \phi_i S\cos\alpha$ et $\Phi = E\,\phi_i = pc\,\phi_i$, on trouve

$$\boxed{N_i = \frac{\Phi\,S\cos\alpha}{pc} \qquad \text{soit} \qquad \overrightarrow{F} = \frac{2\Phi\,S}{c}\cos^2\alpha\,\overrightarrow{n}}$$

I.2.4 Comme $\overrightarrow{n} = \cos\alpha\,\overrightarrow{e_r} + \sin\alpha\,\overrightarrow{e_\theta}$, on a

$$F_\theta = \frac{2\Phi\,S}{c}\cos^2\alpha\,\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{e_\theta} = \frac{2\Phi\,S}{c}\cos^2\alpha\,\sin\alpha$$

soit
$$\frac{dF_\theta}{d\alpha} = \frac{2\Phi\,S}{c}\left[-2\cos\alpha\,\sin^2\alpha + \cos^3\alpha\right] = \frac{2\Phi\,S}{c}\cos\alpha\left[1 - 3\sin^2\alpha\right]$$

De ce fait,
$$\frac{dF_\theta}{d\alpha} = 0 \iff \cos\alpha = 0 \quad \text{ou} \quad \sin^2\alpha = \frac{1}{3}$$
$$\iff \alpha = 0 \quad \text{ou} \quad \alpha = \text{Arcsin}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \qquad \text{car } \alpha \in \left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$$

Comme F_θ est nulle en 0 et $\pi/2$ et positive partout ailleurs, la poussée orthoradiale est maximale pour

$$\boxed{\alpha_m = \text{Arcsin}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = 35{,}3°}$$

I.2.5 Avec les valeurs fournies par l'énoncé,

$$\boxed{a = \frac{F_\theta}{m} = \frac{2\Phi\,S}{mc}\cos^2\alpha_m\,\sin\alpha_m = 3{,}5.10^{-5}\ \text{m.s}^{-2}}$$