CCP Maths 1 PC 2009 — Corrigé

I.1 Soient $\mathrm{S} \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ et $\mathrm{M} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

- ${}^t({}^t\mathrm{M}\,\mathrm{SM}) = {}^t\mathrm{M}\,{}^t\mathrm{S}\,{}^t({}^t\mathrm{M}) = {}^t\mathrm{M}\,\mathrm{SM}$ car S est symétrique.
- $\forall \mathrm{X} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \quad {}^t\mathrm{X}({}^t\mathrm{M}\,\mathrm{SM})\mathrm{X} = {}^t(\mathrm{MX})\mathrm{S}(\mathrm{MX}) \geqslant 0$ car S est positive.

$$\boxed{{}^t\mathrm{M}\,\mathrm{SM} \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})}$$

I.2 Comme S est symétrique, il existe $\mathrm{P} \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et $\mathrm{D} = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ diagonale tels que $\mathrm{S} = \mathrm{PDP}^{-1} = \mathrm{PD}\,{}^t\mathrm{P}$. Pour $\mathrm{X} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, posons $\mathrm{Y} = {}^t\mathrm{P}\,\mathrm{X} = {}^t(y_1 \cdots y_n)$.

- Si $\lambda_i \geqslant 0$ pour tout i, alors ${}^t\mathrm{X}\,\mathrm{SX} = {}^t\mathrm{Y}\,\mathrm{DY} = \sum_{i=1}^n \lambda_i {y_i}^2 \geqslant 0$ donc $\mathrm{S} \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$. Si de plus $\lambda_i > 0$ pour tout i, on obtient, pour tout $\mathrm{X} \neq 0$, $\mathrm{Y} = \mathrm{P}^{-1}\mathrm{X} \neq 0$ et ${}^t\mathrm{X}\,\mathrm{SX} > 0$, donc $\mathrm{S} \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

- Si $\mathrm{S} \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$, en prenant $\mathrm{Y} = {}^t(0 \cdots 1 \cdots 0)$, on a ${}^t\mathrm{X}\,\mathrm{SX} = {}^t\mathrm{Y}\,\mathrm{DY} = \lambda_i \geqslant 0$ (> 0 si de plus $\mathrm{S} \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ car $\mathrm{Y} \neq 0$).

$$\boxed{\mathrm{S} \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R}) \Longleftrightarrow \mathrm{sp}\,(\mathrm{S}) \subset \mathbb{R}^+ \qquad \text{et} \qquad \mathrm{S} \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}) \Longleftrightarrow \mathrm{sp}\,(\mathrm{S}) \subset \mathbb{R}^{+*}}$$

I.3 Il est clair que A est symétrique. $\chi_\mathrm{A} = \det(\mathrm{A} - \mathrm{XI}_2) = \mathrm{X}^2 - 3\mathrm{X} + 1$, de racines

$$\mathrm{sp}\,(\mathrm{A}) = \left\{\frac{3-\sqrt{5}}{2}, \frac{3+\sqrt{5}}{2}\right\} \subset \mathbb{R}^{+*}$$

D'après la question I.2, $\boxed{\mathrm{A} \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})}$

I.4 On remarque que -1 est valeur propre de B pour ${}^t(1\ 0\ 0)$ donc

$$\boxed{\mathrm{B} \notin \mathrm{S}_n^{++}(\mathbb{R})}$$

I.5 T est symétrique par hypothèse. Comme T est semblable à S, elle a les mêmes valeurs propres que S, qui sont positives car $\mathrm{S} \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.

$$\boxed{\mathrm{T} \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})}$$

I.6.a Soit $\mathrm{X} \neq 0$ tel que $\mathrm{MX} = \lambda\mathrm{X}$. Alors $\mathrm{X} = \lambda\mathrm{M}^{-1}\mathrm{X}$. Comme $\lambda \neq 0$ (M est inversible) on a $\mathrm{M}^{-1}\mathrm{X} = \lambda^{-1}\mathrm{X}$ et $\lambda^{-1} \in \mathrm{sp}\,\mathrm{M}^{-1}$. Ainsi $\{\lambda^{-1} \mid \lambda \in \mathrm{sp}\,\mathrm{M}\} \subset \mathrm{sp}\,(\mathrm{M}^{-1})$. Comme $(\mathrm{M}^{-1})^{-1} = \mathrm{M}$, on obtient l'inclusion inverse de manière analogue.

$$\boxed{\mathrm{sp}\,(\mathrm{M}^{-1}) = \{\lambda^{-1} \mid \lambda \in \mathrm{sp}\,(\mathrm{M})\}}$$

I.6.b Soit $\mathrm{S} \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

- ${}^t(\mathrm{S}^{-1}) = ({}^t\mathrm{S})^{-1} = \mathrm{S}^{-1}$ car S est symétrique, donc S^{-1} est symétrique.
- D'après la question précédente, $\mathrm{sp}\,(\mathrm{S}^{-1}) = \{\lambda^{-1} \mid \lambda \in \mathrm{sp}\,(\mathrm{S})\} \subset \mathbb{R}^{+*}$ car S est définie positive (question I.2).

$$\boxed{\mathrm{S} \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}) \Longrightarrow \mathrm{S}^{-1} \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})}$$

I.7 Supposons que pour tout $\mathrm{X} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, ${}^t\mathrm{X}\,\mathrm{S}\mathrm{X} = 0$. Soient $\lambda \in \mathrm{sp}\,(\mathrm{S})$ et $\mathrm{X} \neq 0$ un vecteur propre associé. Alors $0 = {}^t\mathrm{X}\,\mathrm{S}\mathrm{X} = \lambda \|\mathrm{X}\|^2$ et comme $\mathrm{X} \neq 0$ on a $\lambda = 0$. Puisque S est diagonalisable, S est alors semblable à la matrice nulle, donc nulle.

$$\boxed{(\forall \mathrm{X} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \quad {}^t\mathrm{X}\,\mathrm{S}\mathrm{X} = 0) \Longrightarrow \mathrm{S} = 0}$$

I.8.a Si $\mathrm{S}_1 \leqslant \mathrm{S}_2$ et $\mathrm{S}_2 \leqslant \mathrm{S}_1$ alors pour tout $\mathrm{X} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ on a ${}^t\mathrm{X}(\mathrm{S}_2 - \mathrm{S}_1)\mathrm{X} \geqslant 0$ et ${}^t\mathrm{X}(\mathrm{S}_1 - \mathrm{S}_2)\mathrm{X} \geqslant 0$ donc ${}^t\mathrm{X}(\mathrm{S}_2 - \mathrm{S}_1)\mathrm{X} = 0$ et d'après la question I.7, $\mathrm{S}_1 = \mathrm{S}_2$.

$$\boxed{(\mathrm{S}_1 \leqslant \mathrm{S}_2 \text{ et } \mathrm{S}_2 \leqslant \mathrm{S}_1) \Longrightarrow \mathrm{S}_1 = \mathrm{S}_2}$$

I.8.b Prenons $\mathrm{S}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $\mathrm{S}_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Alors $\mathrm{S}_2 - \mathrm{S}_1 = \mathrm{S}_1 - \mathrm{S}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Comme -1 est valeur propre de cette matrice, on n'a ni $\mathrm{S}_1 \leqslant \mathrm{S}_2$ ni $\mathrm{S}_2 \leqslant \mathrm{S}_1$ d'après la question I.2.

I.8.c Prenons $\mathrm{S}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $\mathrm{S}_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Alors $\mathrm{S}_2 - \mathrm{S}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

D'après la question I.2, $\mathrm{S}_1 \leqslant \mathrm{S}_2$ avec $\mathrm{S}_1 \neq \mathrm{S}_2$ mais $\mathrm{S}_2 - \mathrm{S}_1 \notin \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

I.8.d Les valeurs propres de $\alpha(\mathrm{S}_2 - \mathrm{S}_1)$ sont exactement de la forme $\alpha\lambda$ pour $\lambda \in \mathrm{sp}\,(\mathrm{S}_2 - \mathrm{S}_1)$. D'après la question I.2,

$$\boxed{\text{Si } \mathrm{S}_1 \leqslant \mathrm{S}_2, \text{ alors } \alpha\mathrm{S}_1 \leqslant \alpha\mathrm{S}_2 \text{ pour } \alpha > 0 \text{ et } \alpha\mathrm{S}_2 \leqslant \alpha\mathrm{S}_1 \text{ pour } \alpha < 0.}$$

I.8.e Puisque $\mathrm{S} + \mathrm{S}_2 - (\mathrm{S} + \mathrm{S}_1) = \mathrm{S}_2 - \mathrm{S}_1 \in \mathcal{S}_n^{+}(\mathbb{R})$,

$$\boxed{\mathrm{S}_1 \leqslant \mathrm{S}_2 \Longrightarrow \forall \mathrm{S} \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \quad \mathrm{S} + \mathrm{S}_1 \leqslant \mathrm{S} + \mathrm{S}_2}$$

I.9 En appliquant la question I.1 à $\mathrm{S}_2 - \mathrm{S}_1$ on obtient

$$\boxed{\mathrm{S}_1 \leqslant \mathrm{S}_2 \Longrightarrow \forall \mathrm{M} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \quad {}^t\mathrm{M}\,\mathrm{S}_1\mathrm{M} \leqslant {}^t\mathrm{M}\,\mathrm{S}_2\mathrm{M}}$$

I.10.a Si λ est valeur propre de S, alors $\lambda - 1$ est valeur propre de $\mathrm{S} - \mathrm{I}_n \in \mathcal{S}_n^{+}(\mathbb{R})$ donc $\lambda \geqslant 1$. On en déduit que $\mathrm{sp}\,(\mathrm{S}) \subset [\,1\,; +\infty\,[\, \subset \mathbb{R}^{+*}$ donc

$$\boxed{\mathrm{S} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})}$$

I.10.b S^{-1} est symétrique d'après la question I.6.b.

- D'après la question I.6.a, $\mathrm{sp}\,(\mathrm{S}^{-1}) \subset \,]\,0\,; 1\,]$ donc $0 < \mathrm{S}^{-1}$.
- $\lambda \in \mathrm{sp}\,(\mathrm{S}^{-1}) \iff 1 - \lambda \in \mathrm{sp}\,(\mathrm{I}_n - \mathrm{S}^{-1})$
  Comme $0 < \lambda \leqslant 1$, on a $0 \leqslant 1 - \lambda < 1$ d'où $\mathrm{S}^{-1} \leqslant \mathrm{I}_n$.

$$\boxed{\mathrm{I}_n \leqslant \mathrm{S} \Longrightarrow 0 < \mathrm{S}^{-1} \leqslant \mathrm{I}_n}$$

I.11.a Comme ${}^t({}^t\mathrm{M}\,\mathrm{M}) = {}^t\mathrm{M}\;{}^t({}^t\mathrm{M}) = {}^t\mathrm{M}\,\mathrm{M}$, on a ${}^t\mathrm{M}\,\mathrm{M} \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.
De plus, si $\mathrm{X} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $\mathrm{X} \neq 0$, on a ${}^t\mathrm{X}\;{}^t\mathrm{M}\,\mathrm{M}\mathrm{X} = {}^t(\mathrm{M}\mathrm{X})(\mathrm{M}\mathrm{X}) = \|\mathrm{M}\mathrm{X}\|^2 > 0$ car $\mathrm{M} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. Donc

$$\boxed{\mathrm{M} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \Longrightarrow {}^t\mathrm{M}\,\mathrm{M} \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})}$$